ACADEMIC RESEARCH IN EDUCATIONAL SCIENCES VOLUME 2 | ISSUE 5 | 2021
ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
DOI: 10.24411/2181-1385-2021-01011

ОБ ОБОБЩЕНИИ ФОРМУЛЫ ХУА ЛО-КЕНА В МАТРИЧНОМ ПОЛИЭДРЕ

Э. М. Махкамов
Заведующей кафедры «Математика» Чирчикского государственного педагогического института Ташкентской области, PhD

АННОТАЦИЯ

Интегральные формулы, обобщающие интегральную формулу Коши в теории функций одного комплексного переменного служат в качестве важного конструктивного инструмента. Локальные вычеты многих комплексных переменных и интегральные формулы в многомерном комплексном анализе служат в качестве основы в задачах связи значений функции внутри области с границей области или с частью границы. Поэтому изучение интегральных формул и вычетов многих переменных в теории функций играет важную роль и считается одним из актуальных направлений современной математики.

Ключевые слова: математика, ХУА ЛО-КЕН, полиэдр, теорема, формула.

GENERALIZATION OF THE HUA LO-KEN FORMULA IN THE MATRIX POLYHEDRON

ABSTRACT

Integral formulas generalizing the Cauchy integral formula in the theory of functions of one complex variable serve as an important constructive tool. Local residues of many complex variables and integral formulas in multivariate complex analysis serve as a basis in the problems of connecting the values of a function within a domain with the boundary of the domain or with a part of the boundary. Therefore, the study of integral formulas and residues of many variables in function theory plays an important role and is considered one of the topical trends in modern mathematics.

Keywords: mathematics, HUA LO-KEN, polyhedron, theorem, formula.

Рассмотрим $\hat{\mathbb{C}}[n\times n]$ — пространство $[n\times n]$- кососимметрических матриц, элементы которых являются комплексными числами, и классическую область третий типа

$$D_3=\{Z\in\hat{\mathbb{C}}[n\times n]: I^{(n)}+Z\overline{Z}>0\},$$

где $I^{(n)}$- единичная матрица порядка n, $\overline{Z}$- матрица, комплексно сопряженная матрице Z (Напомним, что условие $H>0$ для эрмитовой матрицы H означает, что H положительно определена, т.е. все собственные значения положительны) ([1],[2]).

Граница области D_3 определяется следующим образом ([2]):

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
DOI: 10.24411/2181-1385-2021-01011

$$\partial D_3 = \{Z \in \hat{\mathbb{C}}[n\times n] : \det\left(I^{(n)} + Z\overline{Z}\right) = 0, I^{(n)} + Z\overline{Z} > 0\}.$$

Остов области D_3 определяется следующим образом [1]:

$$\Gamma = \left\{Z \in \hat{\mathbb{C}}[n\times n] : I^{(n)} + Z\overline{Z} = 0\right\}.$$

Известно [4,стр.96], что с помощью интегральной формулы Хуа Ло-кена всякую голоморфную функцию $h(Z) \in \mathcal{O}(D_3) \cap C\left(\overline{D_3}\right)$ можно представить в виде интеграла (при четном n)

$$h(Z) = c_n \int_{\Gamma} \frac{h(X)dX}{\det^{\frac{n-1}{2}}(X - Z)}, \quad (1)$$

где $dX = \bigwedge\limits_{\substack{i=1,\, j=1 \\ i\le j}}^{n} dx_{ij}$ порядок следования дифференциалов и постоянное c_n выбраны так, что

$$c_n \int_{I^{(n)} + X\overline{X} = 0} \frac{dX}{\det^{\frac{n-1}{2}}(X)} = 1.$$

Пусть дано отображение $f = \left(f_1, \ldots, f_{\frac{n(n-1)}{2}}\right) : G \to \mathbb{C}^{\frac{n(n-1)}{2}}$, голоморфное в некоторой области $G \subset \mathbb{C}^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

В дальнейшем отображение $f = \left(f_1, \ldots, f_{\frac{n(n-1)}{2}}\right) : G \to \mathbb{C}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ представим в виде $[n\times n]-$кососимметрических матриц:

$$f(Z) = \begin{pmatrix} 0 & f_{12}(Z) & \cdots & f_{1n}(Z) \\ -f_{12}(Z) & 0 & \cdots & f_{2n}(Z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -f_{1n}(Z) & -f_{2n}(Z) & \cdots & 0 \end{pmatrix} : G \to \hat{\mathbb{C}}[n\times n].$$

Введем понятие матричного полиэдра.

Матричным *полиэдрическим множеством,* определённым голоморф-ным отображением $f : G \to \hat{\mathbb{C}}[n\times n]$, называется множество

$$f^{-1}\left(D_{3,r}\right) = \{Z \in G : r^2 I^{(n)} + f(Z)\overline{f(Z)} > 0, r > 0\},$$

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
DOI: 10.24411/2181-1385-2021-01011

если оно относительно компактно в G, т.е. $f^{-1}\left(D_{3,r}\right)\Subset G$. Связная компонента матричного полиэдрического множество $f^{-1}\left(D_{3,r}\right)$ называется *матричным полиэдром*, обозначим его через $\Omega_{f,r}$. Остов области $\Omega_{f,r}$ определяется следующим образом :

$$\Gamma_{f,r}=\{Z\in G: r^2 I^{(n)}+f\left(Z\right)\overline{f\left(Z\right)}=0, r>0\}.$$

В данной работе получено интегральное представление Вейля-Хуа Ло-кена в $\Omega_{f,r}$.

Известная теорема Хефера (см.[3]) утверждает, что для некоторой окрестности U области $\Omega_{f,r}$ существуют такие фукнции $P_{lk}^{ij}(\mathrm{X},Z)\in\mathcal{O}(U\times U)$, что при всех $\left(X,Z\right)\in\left(U\times U\right)$ имеют место равенства

$$f_{ij}\left(X\right)-f_{ij}(Z)=\sum_{\substack{k=1,\ l=1\\ k\le l}}^{n}(\mathrm{x}_{kl}-z_{kl})P_{kl}^{ij}\left(\mathrm{X},Z\right), i,j=1,2,...,n, i<j. \qquad (2)$$

Обозначим через $\mathbb{H}(\mathrm{X},Z)$ определитель матрицы $\left\|P_{kl}^{ij}(\mathrm{X},Z)\right\|$ порядка $\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{n(n-1)}{2}$, строки которой нумеруются парами k,l, а столбцы — парами i, j.

Теорема 1. *Пусть функция* $h\left(Z\right)\in\mathcal{O}\left(\Omega_{f,r}\right)\cap C\left(\overline{\Omega}_{f,r}\right)$. *Тогда для всякой точки* $Z\in\Omega_{f,r}$ *верна интегральная формула Вейля − Хуа Ло-кена (при четном* n *)*

$$h(Z)=c_n\int\limits_{\Gamma_{f,r}}\frac{h(\mathrm{X})\mathbb{H}(\mathrm{X},Z)\underset{\substack{i=1,\ \mathrm{j}=1\\ i\le j}}{\overset{n}{\wedge}}dx_{ij}}{\det{}^{\frac{n-1}{2}}\left(f\left(X\right)-f\left(Z\right)\right)}, \qquad (3)$$

где $\Gamma_{f,r}=\{Z\in G: r^2 I^{(n)}+f\left(Z\right)\overline{f\left(Z\right)}=0, r>0\}$ *— остов области* $\Omega_{f,r}$, *а* c_n *выбраны согласно условию*

$$c_n\int\limits_{I^{(n)}+X\overline{X}=0}\frac{dX}{\det{}^{\frac{n-1}{2}}\left(X\right)}=1.$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, сначала докажем следующее утверждение.

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
DOI: 10.24411/2181-1385-2021-01011

Лемма 1. *Пусть* X — $[n\times n]$ *кососимметрическая матрица и* $\|X\|_s<\varepsilon$. *Тогда для всех* δ, $0<\delta<\varepsilon-\|X\|_s$ *в* $G_*=G\setminus\{Z:\det(f(Z)-X)=0\}$ *имеет место гомология циклов* $\Gamma_{f-X,\delta}\sim\Gamma_{f,\varepsilon}$ *где* $\|X\|_s$ *ее спектральную норму и*

$$\Gamma_{f-X,\delta}=\left\{Z\in G:\ \delta^2 I+(f(Z)-X)\overline{(f(Z)-X)}=0\right\}.$$

Замечание: Аналогичная теорема и лемма доказана в работе ([5],[6].

Доказательство. Пусть

$$C=\left\{Z\in G:(\varepsilon-t\|X\|_s)^2 I+(f(Z)-tX)\overline{(f(Z)-tX)}=0,\,0\le t\le 1\right\}$$

$-\left(\dfrac{n(n-1)}{2}+1\right)$-мерная цепь.

Заметим, что для $Z\in C$ верно равенство $\|f(Z)-tX\|_s=\varepsilon-t\|X\|_s$.

Ясно, что $C\subset\overline{\mathrm{M}}_{f,\varepsilon}$. Действительно, если $Z^0\in G\setminus\overline{\Omega}_{f,\varepsilon}$, то $\|f(Z^0)\|_s>\varepsilon$. Таким образом, имеем

$$\|f(Z^0)-tX\|_s\ge\|f(Z^0)\|_s-t\|X\|_s>\varepsilon-t\|X\|_s.$$

Отсюда следует, что C — компактная цепь.

Далее покажем, что если Z из носителя $|C|$ цепи C, то $\det(f(Z)-X)\neq 0$. Предположим, что для $Z\in|C|$ верно равенство $\det(f(Z)-X)=0$. Тогда существует ненулевой вектор z', такой, что $z'(f(Z)-X)=0$. Следовательно,

$$\overline{(f(Z)-tX)}(z')^*=(1-t)\overline{X}(z')^*,\quad z'(f(Z)-tX)=(1-t)z'X.$$

Откуда получаем

$$z'((\varepsilon-t\|X\|_s)^2 I+(1-t)^2 X\overline{X})(z')^*=0,$$

т.е. $(1-t)\|X\|_s=\varepsilon-t\|X\|_s$ или $\|X\|_s=\varepsilon$, что противоречит условию леммы. Таким образом, носитель $|C|$ лежит в G_*. Так как для любых $\delta<\varepsilon-\|X\|_s$ циклы $\Gamma_{f-X,\delta}$ принадлежат G_* и имеет место гомология циклов $\Gamma_{f-X,\delta}\sim\Gamma_{f-X,\varepsilon-\|X\|_s}=\partial C-\Gamma_{f,\varepsilon}$, то из последнего равенства следует утверждение леммы.

Лемма доказана.

Теперь приведем интегральную интерпретацию локального вычета, которая следует из общего интегрального представления для локального вычета, полученного в [3] и будет применена для доказательства теоремы.

Пусть отображение $f(Z)$ голоморфно в замкнутой окрестности $\overline{U}_A$ и имеет в точке $A\in\hat{\mathbb{C}}[n\times n]$ изолированный нуль. Для ростка $h:U_A\to\mathbb{C}$ и

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
DOI: 10.24411/2181-1385-2021-01011

отображения $f(Z)$ действие локального вычета в точке A определяется по формуле

$$\operatorname*{res}_{A} {}_{f}\big(h(Z)\big) = c_n \int\limits_{\Gamma_{f,\varepsilon}} \frac{h(Z) \underset{\substack{i=1,\, j=1 \\ i\le j}}{\overset{n}{\wedge}} dz_{ij}}{\det^{\frac{n-1}{2}} f(Z)}, \tag{4}$$

где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число.

Доказательство теоремы 1. Для $Z \in \Omega_{f,r}$ имеем $r^2 I + f(Z)\overline{f(Z)} > 0$, поэтому согласно лемме 1 в области регулярности подынтегральной формы в (2) цикл $\Gamma_{f,r}$ гомологичен циклу

$$\Gamma_{f(\mathrm{X})-f(Z),\delta} = \{\mathrm{X} \in G : \delta^2 I + (f(\mathrm{X}) - f(Z))\overline{(f(\mathrm{X}) - f(Z))} = 0\},$$

где $\delta < r - \|f(Z)\|_s$.

С другой стороны, $\Gamma_{f(\mathrm{X})-f(Z),\delta}$ гомологичен сумме циклов $\sum_{\nu} \Gamma_{X^{(\nu)}(Z),\delta}$, где $\Gamma_{X^{(\nu)}(Z),\delta} = \left\{\mathrm{X} \in U_{X^{(\nu)}(\mathrm{Z})} : \delta^2 I + \left(f(X) - f(Z)\right)\overline{\left(f(\mathrm{X}) - f(Z)\right)} = 0\right\}$, $X^{(\nu)}(Z)$ — нули отображения $f(\mathrm{X}) - f(Z)$, среди которых есть и точка $X = Z$.

Таким образом, согласно формуле (1) и формуле преобразования локального вычета, получим

$$h(Z) = c_n \int\limits_{r^2 I + (\mathrm{X}-Z)\overline{(\mathrm{X}-Z)}=0} \frac{h(X) \underset{\substack{i=1,\, j=1 \\ i\le j}}{\overset{n}{\wedge}} dx_{ij}}{\det^{\frac{n-1}{2}} (X - Z)} = \operatorname*{res}_{Z} {}_{f(X)-f(Z)}(h \det \| P^{ij}_{lk} \|) =$$

$$= \sum_{\nu} \operatorname*{res}_{X^{\nu}(Z)} {}_{f(X)-f(Z)}(h \det \| P^{ij}_{lk} \|).$$

Далее, покажем, что $\det \left\| P^{ij}_{kl} \right\| \in I_{X^{(\nu)}(z)}\left(f(X) - f(Z)\right)$ для $X^{(\nu)}(Z) \neq Z$.

Действительно, в силу равенства (2) имеем

$$\begin{aligned} g(\mathrm{X},\mathrm{Z}) = f(X) - f(Z) = \big(& f_{11}(X) - f_{11}(Z), f_{12}(X) - f_{12}(Z), \ldots, f_{1n}(X) - f_{1n}(Z), \\ & , f_{22}(X) - f_{22}(Z), f_{23}(X) - f_{23}(Z), \ldots, f_{2n}(X) - f_{2n}(Z), \\ & , f_{33}(X) - f_{33}(Z), f_{34}(X) - f_{34}(Z), \ldots, f_{3n}(X) - f_{3n}(Z), \\ & \ldots, f_{nn}(X) - f_{nn}(Z)\big) = \end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{\substack{k=1,l=1 \\ k\le l}}^{n} (x_{kl} - z_{kl}) P^{11}_{kl}(\mathrm{X},\mathrm{Z}), \ldots, \sum_{\substack{k=1,l=1 \\ k\le l}}^{n} (x_{kl} - z_{kl}) P^{nn}_{kl}(\mathrm{X},\mathrm{Z}) \right) =$$

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
DOI: 10.24411/2181-1385-2021-01011

$$=\begin{pmatrix} x_{11}-z_{11} & x_{12}-z_{12} & \dots & x_{nn}-z_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{11}^{11} & P_{11}^{22} & \cdots & P_{11}^{nn} \\ P_{12}^{11} & P_{12}^{22} & \cdots & P_{12}^{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{nn}^{11} & P_{nn}^{22} & \cdots & P_{nn}^{nn} \end{pmatrix} = A\left(P_j^k\right) f,$$

т.е. $g\left(X^{(\nu)}(Z),\mathrm{Z}\right)=0$, а $f\left(X^{(\nu)}(Z)\right)\neq 0$ для $X^{(\nu)}(Z)\neq Z$. Отсюда согласно лемме [5] получаем наше утверждение. Следовательно, по предложению [5] имеем

$$\sum_{\nu}\operatorname*{res}_{X^{\nu}(Z)} f(X)-f(Z)(h\det\|P_{lk}^{ij}\|)=\operatorname*{res}_{Z} f(X)-f(Z)(h\det\|P_{lk}^{ij}\|)=$$

$$=\int_{\Gamma_{f(X)-f(Z),\delta}}\frac{h(X)\mathbb{H}(\mathrm{X},Z)\overset{n}{\underset{\substack{i=1,\,j=1\\ i\le j}}{\wedge}}dx_{ij}}{\det^{\frac{n-1}{2}}\left(f(X)-f(Z)\right)}=\int_{\Gamma_{f,r}}\frac{h(X)\mathbb{H}(\mathrm{X},Z)\overset{n}{\underset{\substack{i=1,\,j=1\\ i\le j}}{\wedge}}dx_{ij}}{\det^{\frac{n-1}{2}}\left(f(X)-f(Z)\right)}.$$

Теорема доказана.

В случае $f(Z)\equiv Z$, определитель $\mathbb{H}(\mathrm{X},Z)$ в (3) равен 1 и формула (3) превращается в формулу Хуа Ло-кена для классической области третий типа (1)([4], стр. 96).

Заметим, из интегрального представления Вейля – Хуа Ло-кена (3) вытекает, что голоморфная функция в замкнутом полиэдре $\overline{\Omega}_{f,r}$ достигает своего максимального значения по модулю на $\Gamma_{f,r}$, т.е. имеет место следующее утверждение.

Следствие. *Пусть функция $h(Z)$ голоморфна на $\overline{\Omega}_{f,r}$. Тогда она достигает своего максимального значения по модулю на $\Gamma_{f,r}$.*

Доказательство. Так как $h(Z)$ голоморфна на $\overline{\Omega}_{f,r}$, то для любого натурального k имеем

$$h^k(Z)=c_n\int_{\Gamma_{f,r}}\frac{h^k(\mathrm{X})\mathbb{H}(\mathrm{X},Z)\overset{n}{\underset{\substack{i=1,\,j=1\\ i\le j}}{\wedge}}dx_{ij}}{\det^{\frac{n-1}{2}}\left(f(X)-f(Z)\right)}.$$

Отсюда,

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
DOI: 10.24411/2181-1385-2021-01011

$$\left|h(Z)\right|^k \le \left(\sup_{\Gamma_{f,r}}\left|h^k(X)\right|\right) c_n \int_{\Gamma_{f,r}} \left| \frac{\mathbb{H}(X,Z) \bigwedge\limits_{\substack{i=1,\, j=1 \\ i\le j}}^{n} dx_{ij}}{\det^{\frac{n-1}{2}}\left(f(X)-f(Z)\right)} \right|.$$

Извлекая корень k –й степени и переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$|h(z)|_{\Omega_{f,r}} \le \sup_{\Gamma_{f,r}} |h|.$$

Следствие доказано.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе найден матричный аналог формулы Вейля в полиэдре, определённый с помощью классической области третий типа (т.е. в $\Omega_{f,r}$)

REFERENCES

1. Хуа Ло-кен. *Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях*. М., Изд. иност. лит., 1959.
2. Худайберганов Г., Кытманов А.М., Шаимкулов Б.А. *Анализ в матричных областях*. Монография. Красноярск, Ташкент. 2017. С.-293.
3. Цих А.К., Шаимкулов Б.А. *Интегральные реализации вычета Гротендика и его преобразование при композициях* //Вестник КрасГУ. Серия физ.-мат. науки. 2005. Выпуск 1. С. 151-155.
4. Айзенберг Л.А. *Формула Карлемана в комплексном анализе.* Первые приложения.– Наука, Новосибирск, 1990, 248 с.
5. Шаимкулов Б.А. *Специальное интегральное представление для локального вычета* //Сиб. матем. журн. 2002. Т. 43, № 5. С. 1192–1196.
6. Шаимкулов Б.А., Махкамов Э.М. *Об одном аналоге интегральной формулы Вейля для полиэдров с не кусочно гладкой границей*. Сибир.Мат.Жур. 2011. Том 52, № 2. с. 476-479.
7. Rakhimov, S., Seytov, A., Nazarov, B., Buvabekov, B., Optimal control of unstable water movement in channels of irrigation systems under conditions of discontinuity of water delivery to consumers. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 883 (2020) 012065, Dagestan, 2020, IOP Publishing DOI:10.1088/1757-899X/883/1/012065 (№5, Scopus, IF=4,652)
8. A. Kabulov, I. Normatov, A. Seytov and A. Kudaybergenov, "Optimal Management of Water Resources in Large Main Canals with Cascade Pumping Stations," 2020 IEEE International IOT, Electronics and Mechatronics Conference

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
DOI: 10.24411/2181-1385-2021-01011

(IEMTRONICS), Vancouver, BC, Canada, 2020, pp. 1-4, DOI: 10.1109/IEMTRONICS51293.2020.9216402 (№ 5, Scopus, IF= 9.936).
9. Shavkat Rakhimov, Aybek Seytov, Nasiba Rakhimova, Bahrom Xonimqulov. Mathematical models of optimal distribution of water in main channels. 2020 IEEE 14th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT), INSPEC Accession Number: 20413548, IEEE Access, Tashkent, Uzbekistan, DOI:10.1109/AICT50176.2020.9368798 (AICT) pp. 1-4,(№ 5, Scopus, IF=3,557)
10. A.V. Kabulov, A.J. Seytov, A.A. Kudaybergenov, Classification of mathematical models of unsteady water movement in the main canals of irrigation systems, International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology Vol. 7, Issue 4 , April 2020, ISSN: 2350-0328, India, pp. 13392- 13401.(№ 5, Web of science, IF=3,98)
11. Sh.Kh.Rakhimov, A.J. Seytov, A.A. Kudaybergenov, Optimal control of unsteady water movement in the main canals. International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology Vol. 7, Issue 4 , April 2020, India, ISSN: 2350-0328, pp. 13380-13391. (№ 6, Web of science, IF=3,98).
12. A.J. Seytov, A.R. Kutlimuradov, R.N. Turaev,N.K. Muradov,A.A. Kudaybergenov, Mathematical model of optimal control of the supply canal to the first pumping station of the cascade of the Karshi main canal. International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology Vol. 8, Issue 3 , March 2021. India. ISSN: 2350-0328. pp. 16790- 16797. (№5, web of science IF=6,646)
13. A. V. Kabulov, A. J. Seytov & A. A. Kudaybergenov. Mathematical models of the optimal distribution of water in the channels of irrigation systems. International Journal of Mechanical and Production Engineering Research and Development (IJMPERD) ISSN(P): 2249–6890; ISSN(E): 2249–8001 Vol. 10, Issue 3, Jun 2020, pp. 14193–14202 (№5 Scopus IF = 9.6246)
14. Sh. Kh. Rakhimov, A. J. Seytov, D. K. Jumamuratov & N. K. Rakhimova. Optimal control of water distribution in a typical element of a cascade of structures of a machine canal pump station, hydraulic structure and pump station. India. International Journal of Mechanical and Production Engineering Research and Development (IJMPERD) ISSN (P): 2249–6890; ISSN (E): 2249–8001 Vol. 10, Issue 3, Jun 2020, pp. 11103-11120. (№5 Scopus IF = 9.6246)
15. A Zh Seitov, BR Khanimkulov. Mathematical models and criteria for water distribution quality in large main irrigation canals. Academic research in educational

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
DOI: 10.24411/2181-1385-2021-01011

sciences. Uzbekistan. Ares.uz. Vol. 1. №2, 2020. ISSN 2181-1385. Pp.405-415. (№5, web of science IF=5.723)

16. А. Ж. Сейтов, Б. Р. Ханимкулов, М. Гаипов, О. Хамидуллаева, Н. К. Мурадов. Численные алгоритмы решения задач оптимального управления объектами каршинского магистрального канала. academic research in educational sciences volume 2 | ISSUE 3 | 2021 ISSN: 2181-1385 Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723 DOI: 10.24411/2181-1385-2021-00519. pp. 1145-1153. (№5, web of science IF=5.723)

17. А. Ж. Сейтов А. Р. Кутлимурадов Р. Н. Тураев Э. М. Махкамов Б. Р. Хонимкулов. Оптимальные управления водных ресурсов крупных магистральных каналов с каскадом насосных станций ирригационных систем. academic research in educational sciences volume 2 | ISSUE 2 | 2021 ISSN: 2181-1385 Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: (№5, web of science IF=5.723)

18. Seytov Aybek Jumayevich, Solaeva Mehribon Norimonovna, TadjibayevIkram Uralbaevich. The product of a function and its place in physics. Solid State Technology. Vol. 63 No. 4 (2020). (№5 scopus IF=0.3)

19. Aybek Jumabayevich Seytov, Mamatqobil Nurmamatovich Esonturdiyev, Obid Sherqul Ogli Qarshiboyev, Gulhayo Baxodirovna Quzmanova. academic research in educational sciences volume 1 | ISSUE 3 | 2020 ISSN: 2181-1385 Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2020: 4.804. pp. 784- 788.

20. Ш. Х. Рахимов, А. Ж. Сейтов, М. Р. Шербаев, Д. Жумамурадов, Ф. Ж. Дусиёров. Структура базы данных и программные модули для моделирования управления водными ресурсами каскада насосных станций каршинского магистрального канала. Мелиорация 2019 3(89) стр. 85-91. (№5, web of science IF=0.144)