ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
DOI: 10.24411/2181-1385-2021-00451

НАЧАЛЬНАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КДВ НА ЗВЕЗДНОМ ГРАФЕ С ОДНОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ И ДВУМЯ ОГРАНИЧЕННЫМИ СВЯЗЯМИ

Максад Ибрагимович Ахмедов
Технический институт Ёджу (Ташкент)
maqsad.ahmedov@mail.ru

АННОТАЦИЯ

В данной статье мы исследовали начально - краевую задачу для линеаризованного уравнения КДВ на простом метрическом графе, состоящем из двух ограниченных отрезков и одной полу-бесконечной прямой, соединенных в одной точке, называемой вершиной графа. Единственность решения доказана методом интегралов энергии.

С помощью метода потенциалов построена интегральная формула для решения рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: математика, теорема, аналогия, теория, графа.

INITIAL BOUNDARY PROBLEM FOR THE LINEARIZED KDV EQUATION ON A STELLAR GRAPH WITH ONE SEMI-INFINITE AND TWO BOUNDED CONNECTIONS

Maksad Ibrahimovich Akhmedov
Yeoju Technical Institute (Tashkent)
maqsad.ahmedov@mail.ru

ABSTRACT

In this article, we investigated an initial - boundary value problem for the linearized KDV equation on a simple metric graph consisting of two bounded segments and one semi-infinite straight line connected at one point, called the vertex of the graph. The uniqueness of the solution is proved by the method of energy integrals.

Using the method of potentials, an integral formula is constructed for solving the problem under consideration.

Key words: mathematics, theorem, analogy, theory, graph.

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
DOI: 10.24411/2181-1385-2021-00451

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается линеаризованное уравнение КдФ на звездном графе с тремя ограниченными связями, связанными в одной точке, называемой вершиной. Облигации обозначаются через B_j, $j=1,2,3,$

Координата x_1 на B_1 определяется от $-L_1$ до 0, и координата x_2 на B_2 определяется с 0 до L_2 координата x_3 на B_3 определяется от 0 до $+\infty$ На каждой связи рассмотрим линейную уравнение:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^3}{\partial x_j^3}\right)u_j(x_j,t)=f_j(x,t),\quad t>0, x_j\in B_j, j=1,2,3. \qquad (1)$$

Формулировка задач для приведенного выше звездного графа,мы должны наложить 5 до н.э. в точке вершины, что также должносвязь между облигациями и 2 БК в правой части B_2 и B_3. В деталях мы требуем: B_2 и B_3.

$$u_1(0,t)=a_2u_2(0,t)=a_3u_3(0,t),\ u_{1x}(0,t)=b_2u_{2x}(0,t)=b_3u_{3x}(0,t), \qquad (2)$$

$$u_{1xx}(0,t)=\frac{1}{a_2}u_{2xx}(0,t)+\frac{1}{a_3}u_{3xx}(0,t), \qquad (3)$$

$$u_1(-L_1,t)=\phi_1(t),\ u_2(\mathrm{L}_2,t)=\phi_2(t),\ u_{2x}(\mathrm{L}_2,t)=\delta_2(t), \qquad (4)$$

для $0<t<T,\ \ T=const.$

МЕТОДОЛОГИЯ

Кроме того, мы предполагаем, что функции $f_j(x,t),\ \ j=1,2,3,$ являются достаточно гладкими иограничены. Начальные условия задаются:

$$u_j(x,0)=0, x\in\overline{B_j},\ \ j=1,2,3. \qquad (5)$$

Следует отметить, что приведенные выше условия вершин не являются единственно возможными. Основная мотивация для нашего выбора обусловлена тем, что они гарантируют уникальность решение и, если растворы распадаются (на нуль) на бесконечности, сохраняют норму (энергию). 2. Существование и единственность решений

Лемма 1. Пусть $\frac{1}{b_2^2}+\frac{1}{b_3^2}\le 1$. Тогда проблема (1)-(5) имеет не более одного решения.

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u_j^2(x,t)dx=(2u_ju_{jxx}-u_{jx}^2)|_a^b+2\int_a^b f_j(x,t)u_j(x,t)dx$$

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
DOI: 10.24411/2181-1385-2021-00451

для соответствующих значений констант a и b по каждой облигации. Мы положил $\phi_0(t) \equiv 0$. Тогда указанные равенства и вершиныусловия (2)-(5) уступать

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\varepsilon t}\|u\|^2\right) \le e^{-\varepsilon t}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\|f\|^2 + \phi_1^2(t)\right)$$

$$\|u\|^2 \le \int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\|f(\cdot,\tau)\|^2 + \delta_1^2(\tau)\right)d\tau, \qquad (6)$$

где

$$(u,v) = \int_{-L_1}^{0} u_1 v_1 dx_1 + \int_0^{L_2} u_2 v_2 dx_2 + \int_0^{+\infty} u_3 v_3 dx_3,$$

$\|u\| = \sqrt{(u,u)}$, являются скалярным произведением и нормой определенный на графе, является произвольным положительным числом. Единственность решения следует из (6).

Теорема 1. Пусть, $\frac{1}{b_2^2} + \frac{1}{b_3^2} \le 1$, $\phi_0(t) \in C^2[0,\ T]$, $\phi_1(t) \in C^1[0,\ T]$.

ОБСУЖДЕНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Тогда проблема (1)-(5) имеет уникальный решения в $C^1([0,\ T],\ C^3(\Gamma))$.

Доказательство теоремы. Для доказательства теоремы воспользуемся следующие функции называются фундаментальными решениями уравнение $u_t - u_{xxx} = 0$.

$$U(x,t;\xi,\eta) = \begin{cases} \dfrac{1}{(t-\eta)^{\frac{1}{3}}} f\left(\dfrac{x-\xi}{(t-\eta)^{\frac{1}{3}}}\right), & t > \eta, \\ 0 & t \le \eta \end{cases}$$

$$V(x,t;\xi,\eta) = \begin{cases} \dfrac{1}{(t-\eta)^{\frac{1}{3}}} \varphi\left(\dfrac{x-\xi}{(t-\eta)^{\frac{1}{3}}}\right), & t > \eta, \\ 0 & t \le \eta \end{cases}$$

где $f(x) = \frac{\pi}{\sqrt[3]{3}} Ai\left(-\frac{x}{\sqrt[3]{3}}\right)$, $\varphi(x) = \frac{\pi}{\sqrt[3]{3}} Bi\left(-\frac{x}{\sqrt[3]{3}}\right)$ для $x \ge 0$, $\varphi(x) = 0$ для $x < 0$ и $Ai(x)$ и $Bi(x)$ функции Эйри. Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ являются интегрируемыми

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
DOI: 10.24411/2181-1385-2021-00451

и $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \frac{\pi}{3}$, $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx = \frac{2\pi}{3}$, $\int_{0}^{+\infty} \varphi(x)dx = 0$. Ниже мы также используем дробные интегралы[8]:

$$J^{\alpha}_{(0,t)} f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \ 0 < \alpha < 1$$

и обратный этому оператору, т.е., дробные производные Римана-Лиувилля [8,9], определяемые: $D^{\alpha}_{(0,t)} f(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau, \ 0 < \alpha < 1.$

Мы ищем решение в форма:

$$u_1(x,t) = \int_0^t U(x,t;0,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta + \int_0^t V(x,t;0,\eta)\psi_1(\eta)d\eta +$$

$$+ \int_0^t U(x,t;-L_1,\eta)\alpha_1(\eta)d\eta + F_1(x,t)$$

$$u_2(x,t) = \int_0^t U(x,t;0,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta + \int_0^t V(x,t;L_2,\eta)\alpha_2(\eta)d\eta +$$

$$+ \int_0^t U(x,t;L_2,\eta)\beta_2(\eta)d\eta + F_2(x,t)$$

$$u_3(x,t) = \int_0^t U(x,t;0,\eta)\varphi_3(\eta)d\eta + \int_0^t V(x,t;0,\eta)\alpha_3(\eta)d\eta + F_3(x,t)$$

где

$$F_k(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \int_{B_k} U(x,t;\xi,\eta) f_k(\xi,\eta) d\xi d\eta, \ k = 1,2,3. \qquad (7)$$

Удовлетворяя условиям (2), имеем:

$$\int_0^t \frac{1}{(t-\eta)^{\frac{1}{3}}} \left(f(0)\varphi_1(\eta) + \varphi(0)\psi_1(\eta) + f\left(\frac{L_1}{(t-\eta)^{\frac{1}{3}}}\right)\alpha_1(\eta) - a_2 f(0)\varphi_2(\eta) - \right.$$

$$\left. - a_2\varphi(0)\alpha_2(\eta) - f\left(-\frac{L_2}{(t-\eta)^{\frac{1}{3}}}\right)\beta_2(\eta)\right) d\eta = a_2 F_2(0,t) - F_1(0,t).$$

Отсюда, согласно свойствам дробных производных, можно получить

$$f(0)\varphi_1(t) + \varphi(0)\psi_1(t) - a_2 f(0)\varphi_2(t) - a_2\varphi(0)\alpha_2(\eta) +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} D^{\frac{2}{3}}_{(0,t)} \int_0^t \frac{1}{(t-\eta)^{\frac{1}{3}}} \left[f\left(\frac{L_1}{(t-\eta)^{\frac{1}{3}}}\right)\alpha_1(\eta) - a_2 f\left(-\frac{L_2}{(t-\eta)^{\frac{1}{3}}}\right)\beta_2(\eta) \right] d\eta =$$

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
DOI: 10.24411/2181-1385-2021-00451

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} D_{(0,t)}^{\frac{2}{3}} [a_2 F_2(0,t) - F_1(0,t)], \qquad (8)$$

Аналогично, из второй части этого условия получаем

$$f(0)\varphi_1(t) + \varphi(0)\psi_1(t) - a_3 f(0)\varphi_3(t) - a_3\varphi(0)\alpha_3(t) +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} D_{(0,t)}^{\frac{2}{3}} \int_0^t \frac{1}{(t-\eta)^{\frac{1}{3}}} \left(f\left(\frac{L_1}{(t-\eta)^{\frac{1}{3}}} \right) \alpha_1(\eta) = \right.$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} D_{(0,t)}^{\frac{2}{3}} \left[a_3 F_3(0,t) - F_1(0,t) \right], \qquad (9)$$

$$f'(0)\varphi_1(t) + \varphi'(0)\psi_1(t) - b_2 f'(0)\varphi_2(t) - b_2\varphi'(0)\alpha_2(t) +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} D_{(0,t)}^{\frac{1}{3}} \int_0^t \frac{1}{(t-\eta)^{\frac{2}{3}}} f'\left(\frac{L_1}{(t-\eta)^{\frac{1}{3}}} \right) \alpha_1(\eta) d\eta -$$

$$- b_2 \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} D_{(0,t)}^{\frac{1}{3}} \int_0^t \frac{1}{(t-\eta)^{\frac{2}{3}}} f'\left(-\frac{L_2}{(t-\eta)^{\frac{1}{3}}} \right) \beta_2(\eta) d\eta -$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} D_{(0,t)}^{\frac{1}{3}} \left[b_2 F_{2x}(0,t) - F_{1x}(0,t) \right], \qquad (10)$$

$$f'(0)\varphi_1(t) + \varphi'(0)\psi_1(t) - b_3 f'(0)\varphi_3(t) - b_3\varphi'(0)\alpha_3(t) +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} D_{(0,t)}^{\frac{1}{3}} \int_0^t \frac{1}{(t-\eta)^{\frac{2}{3}}} f'\left(\frac{L_1}{(t-\eta)^{\frac{1}{3}}} \right) \alpha_1(\eta) d\eta =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} D_{(0,t)}^{\frac{1}{3}} \left[b_3 F_{3x}(0,t) - F_{1x}(0,t) \right], \qquad (11)$$

Согласно условию вершины $u_{1xx}(0,t) = \frac{1}{a_2} u_{2xx}(0,t) + \frac{1}{a_3} u_{3xx}(0,t)$

мы получаем $-\frac{2\pi}{3}\cdot\varphi_1(t) + \frac{1}{a_2}\cdot\frac{2\pi}{3}\cdot\varphi_2(t) + \frac{1}{a_3}\cdot\frac{2\pi}{3}\cdot\varphi_3(t) +$

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
DOI: 10.24411/2181-1385-2021-00451

$$+\int_0^t \frac{1}{t-\eta}\left[f''\left(\frac{L_1}{(t-\eta)^{\frac{1}{3}}}\right)\alpha_1(\eta) - \frac{1}{a_2}\cdot f''\left(-\frac{L_2}{(t-\eta)^{\frac{1}{3}}}\right)\beta_2(\eta) = \right.$$

$$= \frac{1}{a_3}F_{3xx}(0,t) + \frac{1}{a_2}F_{2xx}(0,t) - F_{1xx}(0,t), \qquad (12)$$

Из граничных условий (4) получаем

$$f(0)\alpha_1(t) + \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} D^{\frac{2}{3}}_{(0,t)} \int_0^t \frac{1}{(t-\eta)^{\frac{1}{3}}} f\left(\frac{-L_1}{(t-\eta)^{\frac{1}{3}}}\right)\varphi_1(\eta)d\eta +$$

$$+\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} D^{\frac{2}{3}}_{(0,t)} \int_0^t \frac{1}{(t-\eta)^{\frac{1}{3}}} \varphi\left(\frac{-L_1}{(t-\eta)^{\frac{1}{3}}}\right)\psi_1(\eta)d\eta$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} D^{\frac{2}{3}}_{(0,t)}\left[\phi_1(t) - F_1(-\mathrm{L}_1,t)\right], \qquad (13)$$

$$f(0)\varphi_2(t) + \varphi(0)\alpha_2(t) + \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} D^{\frac{2}{3}}_{(0,t)} \int_0^t \frac{1}{(t-\eta)^{\frac{1}{3}}} f\left(\frac{L_2}{(t-\eta)^{\frac{1}{3}}}\right)\beta_2(\eta)d\eta =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} D^{\frac{2}{3}}_{(0,t)}\left[\phi_2(t) - F_2(\mathrm{L}_2,t)\right], \qquad (14)$$

$$f'(0)\varphi_2(t) + \varphi'(0)\alpha_2(t) + \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} D^{\frac{1}{3}}_{(0,t)} \int_0^t \frac{1}{(t-\eta)^{\frac{2}{3}}} f'\left(\frac{L_2}{(t-\eta)^{\frac{1}{3}}}\right)\beta_2(\eta)d\eta =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} D^{\frac{1}{3}}_{(0,t)}\left[\delta_1(t) - F_{1x}(-\mathrm{L}_1,t)\right], \qquad (15)$$

Получена система интегральных уравнений (8) - (15) относительно неизвестных $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \psi_1(t), \alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \beta_2(t))^T$.

Матрица A

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
DOI: 10.24411/2181-1385-2021-00451

$$A=\begin{pmatrix} f(0) & -a_2 f(0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f(0) & 0 & -a_3 f(0) & 0 & 0 & 0 & -a_3\varphi(0) & 0 \\ f'(0) & -b_2 f'(0) & -b_3 f'(0) & \varphi'(0) & 0 & -b_2\varphi'(0) & -b_2\varphi'(0) & 0 \\ -2\pi/3 & 2\pi/3a_2 & 2\pi/3a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f(0) \\ 0 & f(0) & 0 & 0 & 0 & \varphi(0) & 0 & 0 \\ 0 & f'(0) & 0 & 0 & 0 & \varphi'(0) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A=\frac{-2\pi^3}{9}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В условиях теоремы этот определитель не сингулярен.Согласно асимптотам функций Эйри, ядраинтегральные операторы интегрируемы. Следовательно, изтеоремы единственности и альтернатив Фредгольма, что системауравнения имеют единственное решение. Это разрешимостьпроблема доказана.

REFERENCES

1. S.Abdinazarov. The general boundary value problem for the third order equation with multiple characteristics (in Russian). Differential Equations,
1881, 3(1). Pp. 3-12.
2. J.L.Bona and A.S.Fokas. Initial-boundary-value problems for linear and integrable nonlinear dispersive partial differential equations. Nonlinearity,
2008. 21. Pp. 195-203.
3. L.Cattabriga. Unproblema al contorno per una equazione parabolica di ordine dispari. Annalidella Scuola Normale Superiore di Pisa a mat. Serie III.
13(2), 1959.
4. J.E.Colliander, C.E.Kenig. The generalized Korteweg-de Vries equation
on the half line. Commun. Partial Differ. Equations, 2002.
27(11-12). Pp. 2187-2266.
5. T.D.Djuraev. Boundary value problems for mixed and mixed-composite type equations.
(in Russian). Fan Tashkent, 1979.

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
DOI: 10.24411/2181-1385-2021-00451

6. A.V.Faminskii, N.A.Larkin Initial-boundary value problems for quasi linear dispersive equations posed on a bounded interval. Electron. J. Differ. Equ., 2010. 2010(20).
7. A.S.Fokas and L.Y.Sung. Initial boundary value problems for linear dispersive evolution equations on the half line. Technical report of Industrial Mathematics Institute at the University of South Carolina, 1999.
8. M.Rahimy. Applications of fractional differential equations. Applied Mathema-tical Sciences. 2010, 4(50). Pp. 2453-2461.
9. R.Gorenflo, F.Mainard. Fractional calculus: Integral and differential equations of fractional order. arXiv:0805.3823v1, 2008.
10. E.Taflin. Analytic linearization of the Korteweg-De Vries equation. Pacific Journal of Mathematics. 1983. 108(1).
11. V.Belashov, S.Vladimirov. Solitary waves in dispersive complex media: theory, simulation, application. Springer. 2005.
12. G.B.Whithan. Linear and nonlinear waves. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience. 1974.
13. Z.A.Sobirov, H.Uecker, M.Akhmedov. Exact solutions of the Cauchy problem for the linearized KdV equation on metric star graphs. Uz. Math. J. 2015. 3.
14. A.R.Khashimov. Some properties of the fundamental solutions of non-stationary third order composite type equation in multidimensional domains. Journal of Nonlinear Evolution Equations and Applications. January 2013. 2013(1). Pp. 1-9.
15. A.R.Khashimov, S.Yakubov. On some properties of Cauchy problem for non-stationary third order composite type equation. Ufa Mathematical Journal. 2014 6(4). Pp. 135-144.
16. Z.A.Sobirov, M.I.Akhmedov, H.Uecker. Cauchy problem for the linearized KdV equation on general metric star graphs. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 2015, 6(1). Pp. 198-204.
17. Z.A.Sobirov, M.I.Akhmedov, O.V.Karpova, B.Jabbarova. Linearized KdV equation on a metric graph. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 2015, 6(6). Pp. 757-761.